

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STAVEBNÍ
GEOINFORMATIKA

Bayesovské metody v krigování

Autoři:

Bc. Jan ŠPIČKA

Bc. Barbora VYSKOČILOVÁ

Vedoucí projektu:

RNDr. Dr. Jana NOSKOVÁ

PRAHA 2014

Obsah

1	Úvod	1
2	Získání a zpracování dat z NOAA	2
2.1	O klimatických datech NOAA	2
2.2	Získání informací o pozemních meteorologických stanicích	2
2.3	Získání dat z pozemních meteorologických stanic	5
2.4	Zpracování meteorologických dat	7
2.5	Výsledný soubor dat	8
3	Predikce modelovaná bayesovským krigováním	10
3.1	Variogramy	10
3.1.1	Paremetry variogramu	10
3.1.2	Modely variogramu	11
3.2	Tvorba histogramu pro hodnoty range	12
3.3	Bayesovské krigování	13
3.3.1	Realizace výpočtu v R project	13
4	Závěr	17

1 Úvod

Pod pojmem geostatistická data (geodata) si můžeme přestavit prvky, které obsahují měřenou hodnotu přírodního nebo antropogenního jevu s jasně danou polohou na zemském povrchu a časovým údajem, kdy byla data pořízena. Typickým příkladem geodat jsou topologická měření znečištění ovzduší, srážek nebo tlaku v síti hydrometeorologických stanic. Úkolem geostatistiky je tato data dále zpracovávat a provádět nad nimi prostorové analýzy různého charakteru.

V této práci se zaměříme na důležitou část geostatistiky, kterou je interpolační metoda krigování, zde se zaměříme na krigování za použití bayesovských metod. Konkrétní příklady budou realizovány ve volně dostupném výpočetním programu R-project¹ na hydrometeorologických datech z NOAA's National Climatic Data Center (NCDC)², zde také podrobně popíšeme, jak jsme daná data získávali a vhodně upravovali.

Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT
č. SGS14/006/OHK1/1T/11.

¹<http://www.r-project.org/>

²<http://ncdc.noaa.gov/>

2 Získání a zpracování dat z NOAA

2.1 O klimatických datech NOAA

Národní úřad pro oceán a atmosféru (anglicky: National Oceanic and Atmospheric Administration, NOAA) ^{3 4} je vědecká vládní agentura Ministerstva obchodu Spojených států amerických a zaměřuje se na sběr meteorologických a klimatických dat. NOAA nejen varuje před nebezpečným počasím, mapující moře a oblohu, ale také radí jak využívat a chránit oceány a atmosféru jako přírodní zdroje. V tomto směru provádí mnoho výzkumných prací, výzkumných projektů a programů vedoucích k porozumění a lepšímu spravování těchto přírodních zdrojů, kterému napomáhá volným řízením těchto informací přes Národní klimatické datové centrum (anglicky: National Climatic Data Center, NCDC) ⁵ .

Data jsou dostupná ke stažení přes Data Access ⁶ v NCDC. Tato stránka nabízí HTML a FTP přístup ke všem surovým datům ze stanic a z nich odvozených datových produktů. V textu se budeme zabývat průměrnými denními hodnotami (anglicky: Global Summary of the Day, GSOD) z dat pozemních meteorologických stanic ⁷ . Ukážeme si, jak jsou tato data rozmístěna v prostoru a čase, jak data získat a dále automatizovaně zpracovávat pomocí jazyka R. ⁸

2.2 Získání informací o pozemních meteorologických stanicích

Data z meteorologických stanic je možné získat různými způsoby, záleží na objemu stahovaných dat. Pokud hodláme stahovat malé množství dat postačuje webové rozhraní na NCDC. V našem případě chceme proces zcela automatizovat, proto bude nejvhodnější přístup přes FTP ⁹.

Pro získání informací o pozemních meteorologických stanicích (podle jejich polohy nebo číselného označení) jsme vytvořili funkci **st.load**. Vstupem mohou být FIPS ¹⁰, (standardizované dvoupísmenné ¹¹ označení států vytvořené vládou Spojených států amerických) nebo

³<http://www.noaa.gov/>

⁴http://cs.wikipedia.org/wiki/Národní_úřad_pro_oceán_a_atmosféru

⁵<http://www.ncdc.noaa.gov/>

⁶<http://www.ncdc.noaa.gov/data-access>

⁷<http://www.ncdc.noaa.gov/data-access/land-based-station-data>

⁸<http://www.r-project.org/>

⁹<ftp://ftp.ncdc.noaa.gov/pub/data/g sod/>

¹⁰http://en.wikipedia.org/wiki/Federal_Information_Processing_Standards

¹¹<ftp://ftp.ncdc.noaa.gov/pub/data/noaa/country-list.txt>

USAF¹² (číselné označení jednotlivých stanic).

```
> st.load = function(zone_range = c(), transform=TRUE) {  
> ...  
> }
```

Data o stanicích jsou přes FTP přístupná ve formátu CSV. Soubor *ish-history.csv* obsahuje data o všech stanicích, která sbíraly nebo stále sbírají meteorologické informace společně s jejich polohou a dobou sběru dat.

```
> st.csv = "ftp://ftp.ncdc.noaa.gov/pub/data/gsod/ish-history.csv"  
> st = read.csv(st.csv, header=TRUE)  
> dim(st)  
[1] 31944    12  
> names(st)  
[1] "USAF" "WBAN" "STATION.NAME" "CTRY"  
[5] "FIPS" "STATE" "CALL" "LAT"  
[9] "LON" "ELEV..1M." "BEGIN" "END"
```

Podle uživatelského vstupu se vybírají meteorologické stanice. Vstupem pro námi prováděné analýzy jsou kódy zemí FIPS.

```
> zone_range = c('GM', 'PL', 'AU', 'EZ', 'LO', 'HU')  
...  
> if (!is.numeric(zone_range)) {  
+   st = st[st$FIPS %in% zone_range, ]  
+ } else {  
+   st = st[st$USAF %in% zone_range, ]  
+ }  
> dim(st)  
[1] 1105    12
```

Ve zvoleném výběru, existují stanice s prázdným časem zahájení měření nebo bez zeměpisného určení polohy. To by mohlo vést k chybám během analýz a proto takováto data musíme odstranit.

```
> st = st[!is.na(st$BEGIN) & !is.na(st$LAT) & !is.na(st$LON), ]  
> dim(st)  
[1] 961    12
```

Dále jsme provedly transformaci souřadnic¹³ všech použitých stanic ze zeměpisných na kartézské. Získané hodnoty jsou z důvodu snazšího uchovávání dat uloženy v celočíselném

¹²Air Force Datsav3 station number

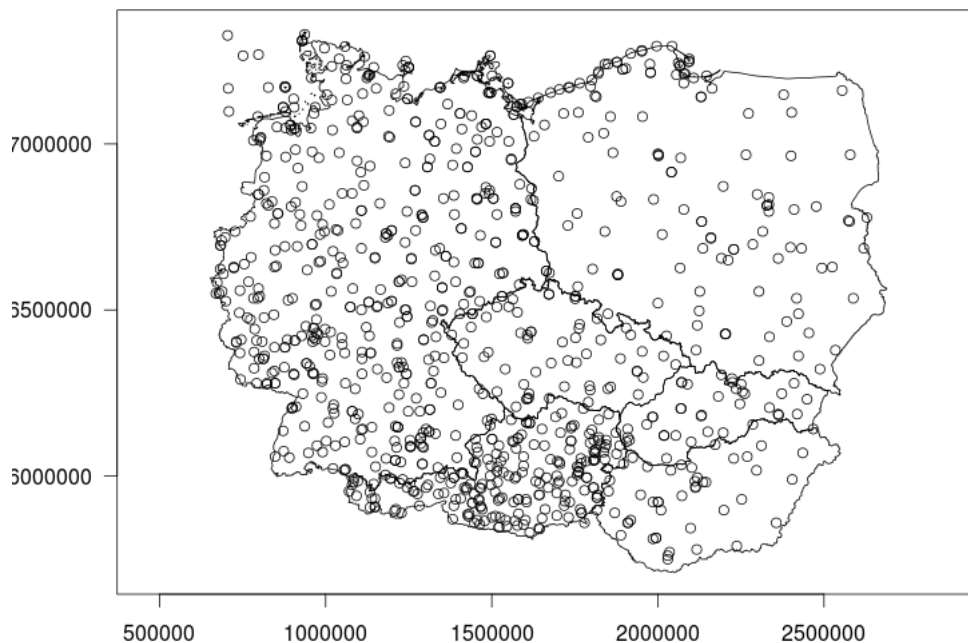
¹³<http://gis.stackexchange.com/questions/95127/transform-coordinates-from-noaa>

tvary (nadmořské výšky v decimetrech a zeměpisné souřadnice v desetinném formátu vynásobeném o 1000). Data potřebujeme převést, protože výpočet predikce se provádí na pravoúhlé mřížce gridu.

```
> if (transform==TRUE) {  
+   st$LAT <- st$LAT/1000  
+   st$LON <- st$LON/1000  
+   st$ELEV <- st$ELEV/10  
+  
+   sc <- cbind(st$LON, st$LAT)  
+   tr <- ptransform(sc/180*pi,  
+     '+proj=longlat',  
+     '+proj=merc')  
+   st$X = tr[,1]  
+   st$Y = tr[,2]  
+ }
```

Byly vytvořeny nové sloupce `st$BEGIN_Y` a `st$END_Y`, které obsahují roky začátku a konce funkčního období stanice ve formátu "RRRR", do kterého jsme je převedli ze stávajícího formátu "RRRRMMDD". Soubory stanic jsou označeny celým rokem a obsahují všechna měřená data za celý kalendářní rok.

```
> st$BEGIN_Y <- as.numeric(substr(st$BEGIN, 1, 4))  
> st$END_Y <- as.numeric(substr(st$END, 1, 4))
```



Obrázek 1: Rozmístění meteorologických stanic použitých pro analýzu.

2.3 Získání dat z pozemních meteorologických stanic

Pro získání (stažení) dat z pozemních meteorologických stanic z NCDC ¹⁴ jsme vytvořili funkci **st.download**, jenž má za úkol data z vybraných stanic stáhnout a rozbalit. Pro tyto operace jsme použili programy *wget* a *gzip* z GNU/Linux, které voláme automatizovaně v jazyku R.

```
> st.download = function(st, path="data/raw", download=FALSE, check=FALSE, ungz=FALSE) {
+ ...
+ }
```

Funkce **st.download** má tři části, do kterých vstupuje seznam vybraných stanic nad kterými chceme provádět analýzy a typ operace.

- **Download**

Stažení všech dat podle vybraných stanic od počátku až do konce jejich fungování.

Spouští se příkazem:

¹⁴<ftp://ftp.ncdc.noaa.gov/pub/data/gsod/>

```
> st.download(st, download=TRUE)
```

V cyklu podle všech stanic a let jejich fungování postupně pomocí programu *wget* volaném v jazyku R a stahujeme kompletní data z meteorologických stanic. V cyklu testujeme zda soubor již neexistuje, pokud by existoval, tak se stahování daného souboru neuskuteční. Data jsou na serveru uložena v jednoduché adresářové struktuře ve formátu *"RRRR/USAF-WBAN-RRRR.op.gz"*

```
> if (download == TRUE) {
+   for (i in 1:nrow(st)) {
+     for (year in st$BEGIN_Y[i]:st$END_Y[i]) {
+       file_name <- sprintf("%06d-%05d-%s.op",
+                             st$USAF[i], st$WBAN[i], year)
+       if (!file.exists(paste(path,"/",file_name,".gz",sep="")) |
+           !file.exists(paste(path,"/",file_name,sep=""))) {
+         wget <- paste("wget -P ", path,
+                       " ftp://ftp.ncdc.noaa.gov/pub/data/gsod/",
+                       year, "/", file_name, sep = "")
+         try(system(wget, intern = FALSE, ignore.stderr = TRUE))
+       }
+     }
+   }
+ }
```

• Check

Zkontroluje již stažená data a vypíše chybějící meteorologická data pro jednotlivé stanice. Spouští se příkazem:

```
> st.download(st, check=TRUE)
```

Cyklem projdou veškerá data a na výstupu se vypíší chybějící soubory. V případě, že soubor chybí, neznamená, že není stažený, ale že na serveru není uložen. Proto je vhodné spustit funkci s parametrem *download=TRUE* dvakrát a voláním funkce s parametrem *check=TRUE* jen hrubě zkontrolovat neexistenci dat.

```
> if (check == TRUE) {
+   for (i in 1:nrow(st)) {
+     for (year in st$BEGIN_Y[i]:st$END_Y[i]) {
+       file_name <- sprintf("%06d-%05d-%s.op", st$USAF[i], st$WBAN[i], year)
+       if (!file.exists(paste(path,"/",file_name,".gz",sep="")) |
+           !file.exists(paste(path,"/",file_name,sep=""))) {
```



```

+         cat("file ", file_name, " missing! \n")
+     }
+ }
+ }
+ }

```

- **Ungz**

Stažená data jsou komprimována ve formátu gzip¹⁵. Kvůli množství dat ze všech let pro stanice namí vybraných zemí je pro následnou práci vhodné provést nejprve dekompresi. Spouští se příkazem:

```
> st.download(st, ungz=TRUE)
```

Programem gzip s parametrem -d (decompress), dekomprimujeme všechna stažená data meteorologických stanic ze serveru.

```

> if (ungz == TRUE) {
+   gzip <- paste("gzip -d ", path, "/*.gz", sep = "")
+   try(system(gzip, intern = FALSE, ignore.stderr = TRUE))
+
+   rm <- paste("rm ", path, "/*.html*", sep = "")
+   try(system(rm, intern = FALSE, ignore.stderr = TRUE))
+ }

```

2.4 Zpracování meteorologických dat

Ke zpracování dat z meteorologických stanic byla vytvořena funkce **st.load2**. Tato funkce ze stažených dat z meteorologických stanic vytvoří vzorek použitelný pro naši analýzu. Spouští se příkazem:

```

> st.load2 = function(st, path="data/raw", month) {
+ ...
+ }

```

Vytvoříme prázdný *data.frame*.

```

> st.data = data.frame(
+   row.names=c("V1", "V2", "V3", "V4", "V5", "V6", "V7", "V8",
+               "V9", "V10", "V11", "V12", "V13", "V14", "V15",
+               "V16", "V17", "V18", "V19", "V20", "V21", "V22"),
+   stringsAsFactors=FALSE
+ )

```

¹⁵<http://www.gzip.org/>

Pro všechny stanice vybereme za každý rok naměřená data pro první den v daném měsíci.

```
> for (i in 1:nrow(st)) {
+   for (year in st[i,"BEGIN_Y"]:st[i,"END_Y"]) {
+     file_name = sprintf("%s/%s-%s-%s.op", path, st$USAF[i], st$WBAN[i], year)
+     if (file.exists(file_name)) {
+       table = read.table(file_name, skip=1, colClasses="character")
+       table = table[table$V3 == sprintf("%s%01",year,month), ]
+       st.data = rbind(st.data, table)
+     }
+   }
+ }
```

Nastavíme jména sloupců, která jim podle specifikace na NCDC náleží.

```
> names(st.data) =
+   row.names=c("USAF", "WBAN", "YEARMODA", "TEMP_F", "TEMP2", "DEWP",
+   "DEWP2", "SLP", "SLP2", "STP", "STP2", "VISIB",
+   "VISIB2", "WDSP", "WDSP2", "MXSPD", "GUST", "MAX",
+   "MIN", "PRCP", "SNDP", "FRSHTT"
+ )
```

Dalším krokem je spojení vybraných naměřených dat s daty o stanicích, která obsahují informace o poloze. V posledním kroku převedeme teplotu ze stupňů Fahrenheita na stupně Celsia.

```
> st.data = merge(x = st.data, y = st, by = "USAF", all.x = TRUE)
> st.data$TEMP_C = fahrenheit_celsius(st.data$TEMP_F)
> st.data$TEMP_C = round(st.data$TEMP_C, digits = 3)
```

2.5 Výsledný soubor dat

Výsledkem procesu získání dat z pozemních meteorologických stanic bude *data.frame* obsahující informace ze všech stanic ze všech let pro daný den (pro nás 1. den v měsíci). V naší analýze budeme potřebovat vždy data za konkrétní rok, měsíc a den. Výběr se provede dotazem na sloupec *YEARMODA* např. pro 1.leden roku 1989.

```
st.data.selected = st.data[st.data$YEARMODA == sprintf("%04d%02d01",1989,1), ]
```

Tato data bohužel z jistých důvodů obsahují geografické duplicity, pravděpodobně z existence více stanic na jednom místě. Tyto duplicity se před vstupem do analýz musí odstranit.

```
> st.geodata.elev$coords <- round(st.geodata.elev$coords, dig=2)
> jitter2d(st.geodata.elev$coords, max=1)
> cbind(st.geodata.elev$coords, jitterDupCoords(st.geodata.elev$coords, max=1))
```

```
> dup.coords(st.geodata.elev)
      dup      X      Y  data
4718    1 1217056 6147210 0.333
4725    2 1217056 6147210 0.611
> dt1 <- jitterDupCoords(st.geodata.elev, max=1)
> dup.coords(dt1)
NULL
```

Takto upravená data budeme dále analyzovat.

3 Predikce modelovaná bayesovským krigováním

3.1 Variogramy

Variogram $\gamma(h)$ je vedle korelační funkce $\rho(h)$ a kovarianční funkce $C(h)$ způsob vyjádření závislosti jednotlivých prvků v prostoru. Všechny tyto funkce mají za úkol zachytit, jaký vliv má vzdálenost a směr na prostorovou spojitost dané datové sady.

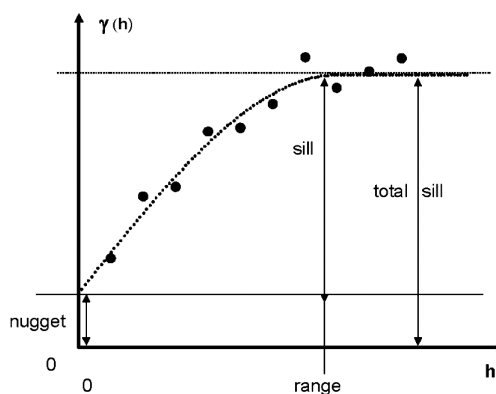
Variogram určuje odchylku mezi spárovanými hodnotami x a y :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^n (x_i - y_i)^2 \quad (1)$$

Vzhledem k tomu, že z konkrétní sady bodů můžeme získat pouze experimentální variogram, který není pro další výpočty vhodný, prokládáme ho modelem tzv. teoretického variogramu, který je matematicky definován a je možné u něj určit jeho parametry.

3.1.1 Parametry variogramu

- **Range** (r) - Hodnota ve které funkce dosahuje svého maxima.
- **Sill** (s) - maximální vzdálenost ve variogramu tzv. výška variogramu.
- **Nugget** (n) - Velikost posunutí variogramu v jeho počátku.



Obrázek 2: Četnosti výskytu parametru range

3.1.2 Modely variogramu

Způsobů, jak vypočítat teoretický variogram je velké množství, my se zaměříme pouze na tři základní. Všeobecnou snahou je vybrat model, který nejlépe vystihuje průběh experimentálního variogramu.

- **Lineární model** - vhodný pro vystižení sklonu variogramu. Se vzrůstající vzdáleností h bodů x a y se model hůře přizpůsobuje skutečným hodnotám.

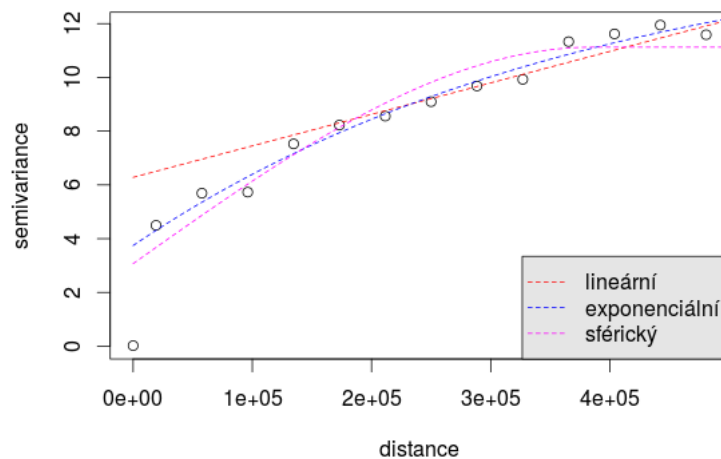
$$\gamma(h) = n + bh^{16}$$

- **Exponenciální model** - exponenciálně rostoucí se vzdáleností h bodů x a y .

$$\gamma(h) = n + s(1 - \exp(-h/r))$$

- **Sférický model** - obecně dosahuje hodnoty sill dříve než exponenciální model.

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= n + s\left(\frac{3h}{2r} - \frac{h^3}{r^3}\right) & \text{pro } h \leq r \\ \gamma(h) &= n + s & \text{pro } h > r \end{aligned}$$



Obrázek 3: Porovnání modelů variogramu

¹⁶ b reprezentuje sklon daný poměrem mezi parametrem sill a range

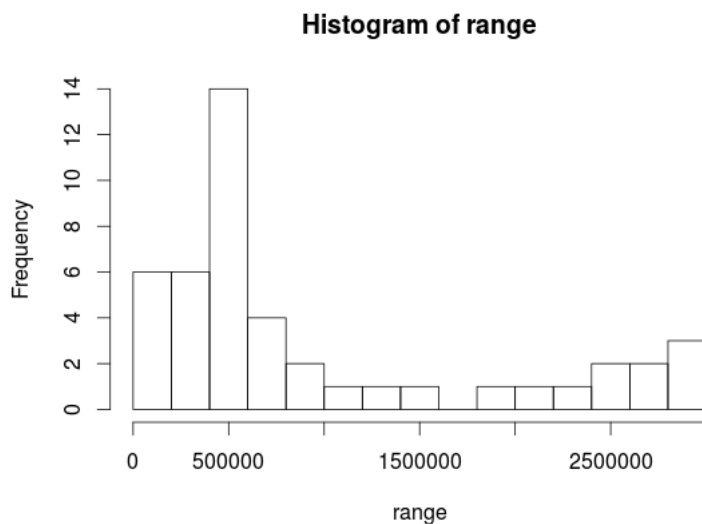
```
#tvorba experimentálního všesměrového variogramu
> v1 = variog(st.geodata.elev, direction = "omnidirectional",
+           tolerance=pi/4,max.dist=500000)

#tvorba modelu variogramu pomocí metody MNČ
> v2 = variofit(v1, cov.model=c("linear","exponential","spherical"))
```

V projektu jsme se zaměřili především na hodnotu parametru range vypočtenou ze sférického modelu. Range teoretického variogramu teploty zjišťujeme pro každý první den ve vybraných měsících mezi lety 1940 - 2009. Z výběru jsme vynechali roky, ve kterých je na daném území méně než 50 aktivních meteorologických stanic. Výstupem je vektor hodnot range, z kterých následně vytváříme histogram.

3.2 Tvorba histogramu pro hodnoty range

Vzhledem k tomu, že máme k dispozici historická data od roku 1940 bereme hustotu rozdělení pravděpodobnosti parametru range jako apriorní hodnotu pro predikci v bayesovském krigování.



Obrázek 4: Četnosti výskytu parametru range

```
#tvorba histogramu s daným počtem tříd
> histo = hist(range, breaks = 15)

#převod relativních četností na hustotu pravděpodobnosti
> ppst = histo$counts/sum(histo$counts)
```

Počet tříd v histogramu jsme volili tak, aby co nejlépe vystihoval četnost výskytu daných hodnoty range. Volba počtu tříd se projevuje na době trvání výpočtu predikce při bayesovském krigování, proto bylo nutné tento počet přizpůsobit tomuto faktoru.

3.3 Bayesovské krigování

Klasické metody krigingu (simple kriging a ordinary kriging) využívají měřené hodnoty k výpočtu predikce na neměřených bodech zájmového území prostorovou interpolací s fixními parametry převzatými z teoretického variogramu dané datové sady. Narozdíl od klasických metod krigingu bayesovské krigování přistupuje k parametrům jako k náhodným veličinám, kde je nutné definovat hustotu apriorního rozdělení vstupních parametrů.

Bayesovský přístup je založen na kombinaci historické informace o neznámých parametrech a pozorovaných dat. Výpočet predikce v bodech na kterých nebylo provedeno měření lze vypočítat díky znalosti hustoty pravděpodobnosti parametrů následovně:

$$P(z_0|z) = \iiint P(z_0, \beta, \sigma^2, \varphi|Z) d\beta d\sigma^2 d\varphi \quad (2)$$

V případě, zaměřujeme-li se pouze na predikci, která na vstupu využívá pouze jeden parametr φ , můžeme vzorec upravit následovně:

$$P(z_0|z) = \iiint P(z_0, \beta, \sigma^2|z, \varphi) d\beta d\sigma^2 P(\varphi|z) d\varphi \quad (3)$$

Zintegrováním dostáváme:

$$P(z_0|z) = \int P(z_0, \beta, \sigma^2|y, \varphi) P(\varphi|z) d\varphi \quad (4)$$

3.3.1 Realizace výpočtu v R project

Před samotným výpočtem je nutné specifikovat velikost a umístění mřížky výstupního gridu. Mřížku jsme volili v závislosti k pozorované veličině. Při volbě příliš husté mřížky by docházelo k prodložování výpočtu bez toho, aby se zvyšovala výpovědní hodnota predikce.

```
#nastavení mřížky gridu na 25km
> grid = pred_grid(st.geodata.elev$coords, by=25000)
```

Funkce pro bayesovské krigování v *R projekt* nepodporuje duplicitu vstupních dat, proto je nutné případné duplicity v datech ošetřit následující sadou příkazů.

```
#vyhledání duplicitních bodů
> dup.coords(st.geodata.elev)

#Vytvoření nového validního souboru
> st.valid <- jitterDupCoords(st.geodata.elev, max=1)

#ověření, že duplicity se v souboru nadále nenacházejí
> dup.coords(st.valid)
```

V defaultním nastavení pro výpočet hodnoty pixelu je počet simulací nastaven na 1000 generovaných hodnot, my jsme toto množství snížili na 100 hodnot, které je pro naše potřeby postačující. Tímto omezením jsme také výrazně zkrátili dobu výpočtu samostatné predikce.

```
> output = output.control(n.posterior = 100, n.predictive = 100)
```

Nastavení parametrů apriorního rozdělení $(\varphi, \tau^2, \beta, \sigma^2)$ se nastavuje přes funkci prior. V našem případě jsme se omezili pouze na nastavení jednoho parametru φ , který představuje již zmíněný parametr range teoretického variogramu.

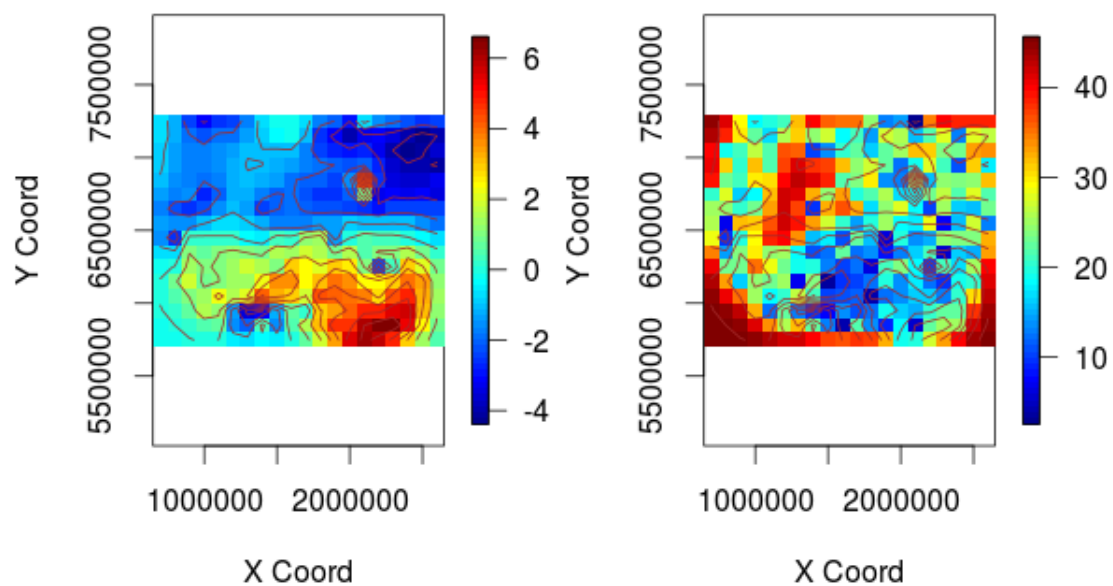
```
#nastavení hustoty pravděpodobnosti a jejich tříd pro parametr phi
> prior = prior.control(phi.prior = histo$counts/sum(histo$counts),
+                       phi.discrete = histo$mids)
```

Pro samotný výpočet predikce

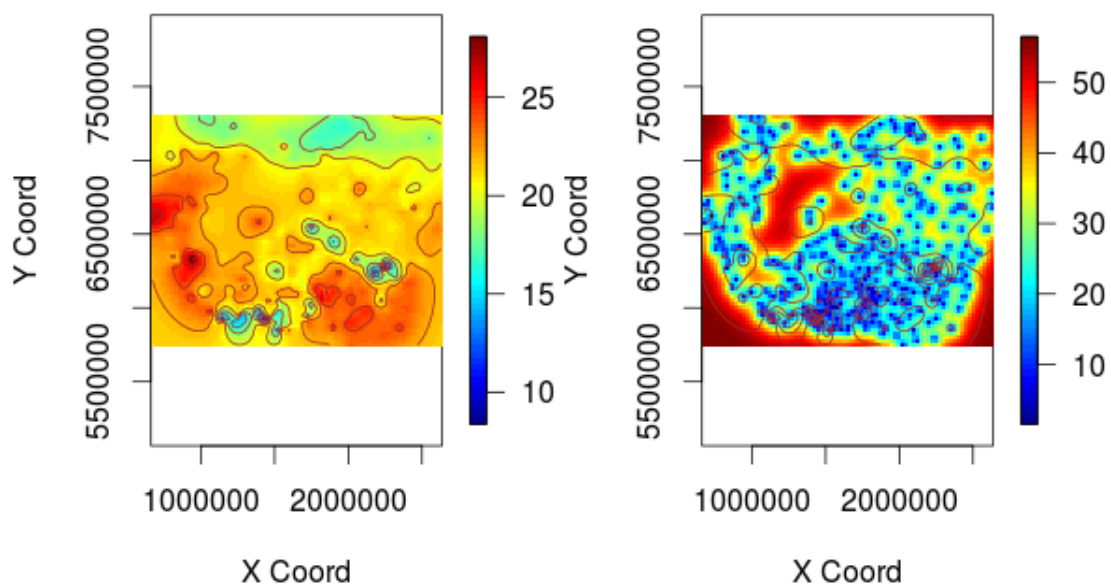
```
> ex.bayes = krige.bayes(st.valid, loc=grid, prior, output)
```

Výstupem z krige.bayes jsou:

- Aposteriorní hodnoty rozdělení parametrů modelu $(\varphi, \tau^2, \beta, \sigma^2)$.
- Hodnoty predikce na jednotlivých pixelech a jejich variance.
- Souhrn apriorních hodnot rozdělení parametrů modelu $(\varphi, \tau^2, \beta, \sigma^2)$



Obrázek 5: Predikce teplot k 1.ledna 2010 pomocí bayesovského krigování a její variance - Velikost gridu 100 km



Obrázek 6: Predikce teplot k 1. červenci 2010 pomocí bayesovského krigování a její variance
- Velikost gridu 25 km

4 Závěr

Bayesovské metody v krigování jsou velice komplexní metoda, která je závislá na kvalitě vstupních dat. V případě, že chceme za apriorní hodnoty brát hodnoty pořízené v minulosti, musíme mít k dispozici komplexní soubor prostorových dat obsahující stále se opakující jevy (ročně, týdně, denně) a můžeme o nich říci, že jsou na sobě v čase nezávislá. V současné době prakticky neexistuje takto ucelený volně dostupný soubor dat. Nejvhodnějším dostupným vstupem jsou data z meteorologických stanic, která byla použita v tomto projektu.

V této práci¹⁷ jsme si osvojili programování v jazyku R a základní principy bayesovského krigování. Do budoucna bychom se chtěli zaměřit především na komplexnější zadávání apriorních hodnot pro vstupní parametry a testování metod bayesovského krigování na simulovaných datech, kterým budeme moci nastavovat rozmístění prvků v prostoru a hodnoty sledovaných jevů.

¹⁷Text práce a spustitelné skripty jsou volně ke stažení na adrese https://github.com/janspicka/bayesian_kriging/

Reference

- [1] Paul L. DELAMATER, Andrew O. FINLEY a Chad BABCOCK. *Downloading and processing NOAA hourly weather station data*. [online]. [cit. 2014-05-14]. Dostupné z URL: http://blue.for.msu.edu/lab-notes/NOAA_0.1-1/NOAA-ws-data.pdf.
- [2] Edward H. ISAACS a R. Mohan SRIVASTAVA. *An Introduction to Applied Geostatistics*. (ISBN 01-950-5012-6), Oxford University Press 1989.
- [3] Paulo J. RIBEIRO Jr. a Petter J. DIGGLE. *Bayesian inference in Gaussian model-base*. Technical report ST-99-08 (Department of Mathematics and Statistics Lancaster University), Lancaster 2010.