



# **ROZDÍLY VÝŠEK V SYSTÉMECH BPV A EGM96 NA ZÁKLADĚ MODELŮ KVAZIGEoidU CR-2005 A QGZÚ-2013 A DAT GNSS-NIVELACE**

*Ing. Vaňková Zuzana*

1. ČVUT, Fakulta stavební, Katedra Geomatiky, Červený Kostelec, Sokolská 215,  
e-mail: zuzana.vankova@fsv.cvut.cz

## **ABSTRAKT**

Tato práce se zabývá určením rozdílů mezi výškami založenými na geopotenciálním modelu EGM96 a výškami v systému Bpv. Znalost uvedeného výškového rozdílu pro území ČR je důležitá pro potřeby civilního letectví, neboť výšky používané v letectví jsou založené právě na modelu EGM96 (tedy jsou vztahované ke geoidu), kdežto systém Bpv (závazný výškový systém pro ČR) má výšky vztahované ke kvazigeoidu. Z toho vyplývá logická potřeba převodu mezi výškami, jejichž rozdíl není konstantní (mění se v závislosti na zeměpisné poloze).

Výškový rozdíl je vypočten jako rozdíl odlehlosti geoidu a výškové anomálie kvazigeoidu, kde obě veličiny jsou vztahovány ke stejnému referenčnímu elipsoidu. Velká část práce se věnuje určení odlehlosti geoidu, kde tvar této plochy je zjištěn pomocí výpočtu velikosti průvodiče ze sady Stokesových koeficientů pro model gravitačního pole EGM96. Dále jsou pro potřeby této práce použity modely kvazigeoidu CR-2005 a QGZÚ-2013, které jsou popsány hodnotami výškové anomálie v pravidelné síti. Dalším použitým zdrojem dat je soubor bodů výběrové údržby ZÚ. Tyto body mají měřenou elipsoidickou výšku metodou GNSS a také nivelovanou výšku v Bpv. Prostřednictvím těchto hodnot je na nich možno výpočtem určit hodnotu výškové anomálie. Rozdíl výšek je tedy určen podle tří různých zdrojů výškových anomálií.

Práce se věnuje také vzájemnému porovnání a zhodnocení jednotlivých výsledků pomocí statistického vyhodnocení a vizualizace v softwaru ArcGIS Pro.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

CR-2005, Bpv, EGM96, elipsoidické výšky, geofyzika, geoid, kvazigeoid, normální Moloděnského výšky, odlehlost geoidu, QGZÚ-2013, Stokesovy koeficienty, Stokesovy ortometrické výšky, výšková anomálie.

# 1 ÚVOD

Tato práce se zabývá výškovým systémem baltským po vyrovnání (dále jen Bpv) a geopotenciálním modelem EGM96. Jejím cílem bylo určit pro území ČR rozdíly výšek v systému Bpv a výšek vztahených ke geopotenciálnímu modelu EGM96, a to na základě dat dvou modelů kvazigeoidu (CR-2005 a QGZÚ-2013) a souboru Stokesových koeficientů, jimiž je popsán model EGM96.

Motivací k realizaci této práce jsou potřeby civilního letectví, kde jsou mezinárodně určovány výšky založené na modelu EGM96. V závazném výškovém systému ČR se však určují výšky v systému Bpv, z čehož vyplývá potřeba převodu výšek pro území ČR.

Uvedený rozdíl výšek není konstantní, ale mění se v závislosti na zeměpisné poloze. Proto bylo uvažováno takové řešení, pomocí kterého by bylo možno určit výškové rozdíly pro body v pravidelné síti na řešeném území. A to s dostatečnou hustotou tak, aby výškový rozdíl pro konkrétní souřadnice mohl být snadno dopočten interpolací z okolních hodnot s dostačující přesností. Takovéto řešení bylo vhodné jak z hlediska využití výsledků, tak z hlediska řešení výpočtu jako takového. Výpočet bod po bodu by byl sice teoreticky snadný, ovšem časově velice náročný pro uvažované velké množství výpočetních bodů. Tedy cílem bylo upravit výpočet tak, aby byly výsledky hromadně určeny pro celou síť výpočetních bodů.

## 2 METODIKA

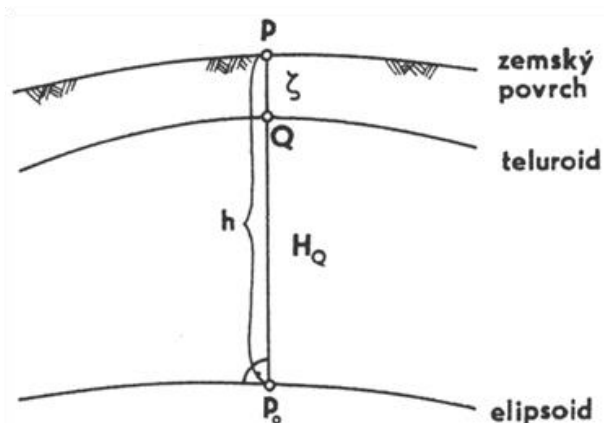
Primárně bude následující kapitola věnována obecnému nastínění teoretického kontextu výpočtu, čímž bude v podstatě shrnut obecný princip řešení. Konkrétní řešení bude shrnuto pouze okrajově (detailně je způsob výpočtu řešen například v [1]).

### 2.1 Řešení obecně

Výšky v systému Bpv odpovídají Moloděnského řešení tvaru Země, které vychází ze vztahu:

$$h_{el} = H_Q + \zeta, \quad (1)$$

kde  $h_{el}$  je elipsoidická výška,  $H_Q$  je normální Moloděnského výška a  $\zeta$  je výšková anomálie. Ani jedna z uvedených výšek nemá fyzikální význam. Elipsoidická výška je vzdálenost mezi bodem na povrchu Země a jeho průmětem po normále na zvolený elipsoid. Význam Moloděnského výšky je znázorněn na Obr.1 jako vzdálenost měřená po normále mezi bodem Q a elipsoidem. Bod Q byl nalezen na normále k elipsoidu procházející bodem P na zemském povrchu jako bod, v němž je normální tíhový potenciál roven tíhovému potenciálu v bodě P. Množina takových bodů tvoří plochu zvanou teluroid. Vzdálenost mezi zemským povrchem a teluroidem je označována jako výšková anomálie. Pokud by (pro jistou analogii s geoidem) byly výškové anomálie vyneseny nad elipsoidem, byla by získána plocha zvaná kvazigeoid.



Obr. 1 Moloděnského výška  $H_Q$ , elipsoidická výška  $h$ , výšková anomálie  $\zeta$  a teluroid [3]



Na základě Stokesovy teorie, již odpovídají ortometrické výšky vztažené k modelu EGM96, lze zapsat obdobný vztah jako (1):

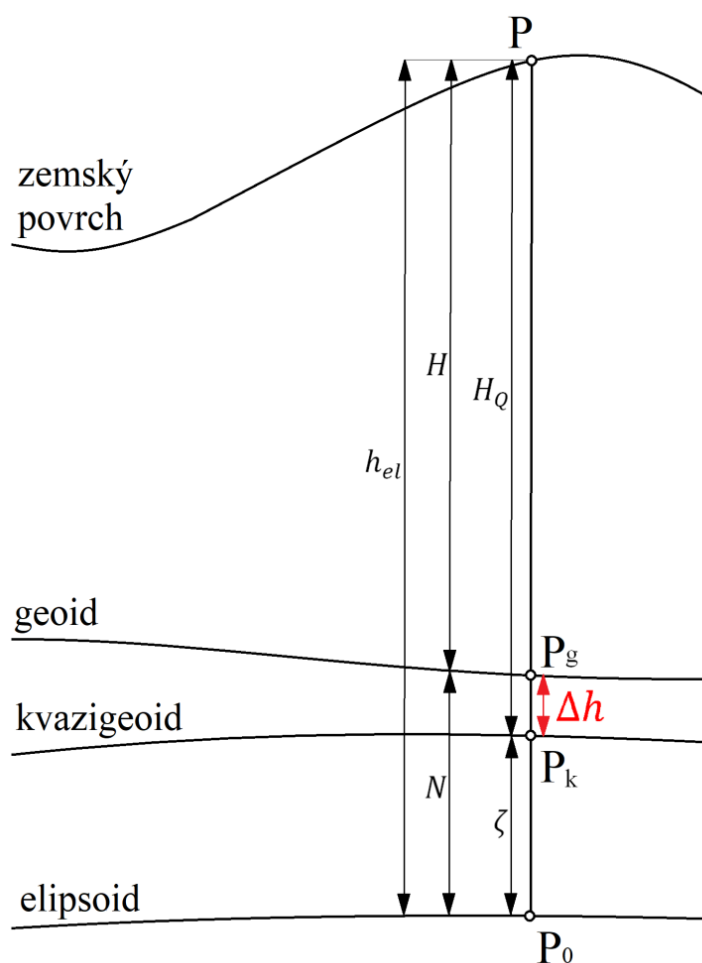
$$h_{el} = H + N \quad (2)$$

kde  $h_{el}$  značí opět elipsoidickou výšku,  $H$  je ortometrická (geoidická) výška a  $N$  je odlehlost geoidu od elipsoidu. Ortometrické výšky udávají vzdálenost bodu na zemském povrchu od jeho průmětu podél tížnice na geoid a mají fyzikální význam. Mohly by vyvstat pochybnosti o rovnosti ve vztahu (2) z důvodu, že elipsoidické výšky se měří po normále a ortometrické výšky podél tížnice. Tímto způsobený rozdíl je však velmi malý, tudíž pro potřeby této práce zanedbatelný. Kombinací vztahů (1) a (2) je po úpravě získán vztah pro rozdíl výšek:

$$H_Q - H = N - \zeta \quad (3)$$

Uvedený vztah (3) umožňuje určit hledaný rozdíl výšek jako rozdíl odlehlosti geoidu a výškové anomálie, což je vzhledem k podkladovým datům vhodné řešení. Výše uvedené skutečnosti jsou pro lepší představu o vztahu výšek zobrazeny na Obr.2, z něhož je například patrné, že hledaný rozdíl výšek (označen jako  $\Delta h$ ) je v podstatě vzdálenost mezi bodem na geoidu a odpovídajícím bodem na kvazigeoidu.

[3], [4], [5]



Obr. 2 Vztahy výšek

## 2.2 Použitá data

Pro realizaci výpočtu je nezbytná znalost použitých dat. Část vstupních dat tvoří geopotenciální model EGM96. Model je popsán sadou plně normovaných Stokesových koeficientů, což jsou harmonické geopotenciální koeficienty v rozvoji tíhového potenciálu v řadu kulových funkcí, a to do stupně (resp. řádu) 360.

Modely kvazigeoidu (CR-2005 a QGZÚ-2013) jsou popsány hodnotami výškové anomálie pro body v pravidelné síti na území ČR s danými geodetickými souřadnicemi. Jde o hodnoty vztažené k elipsoidu GRS80.

## 2.3 Realizace výpočtu

Výpočet byl realizován v programu Matlab. Podle vztahu (3) je rozdíl výšek vypočten jako rozdíl odlehlosti geoidu a výškové anomálie. Výšková anomálie je v rámci podkladových dat známa. Je tedy nutno věnovat se určení odlehlosti geoidu.

V rámci výpočtu bylo řešeno několik dílčích částí, kde jádro tvoří výpočet normovaných Legendreových přidružených funkcí. Pomocí nich je poté realizován výpočet průvodiče geoidu, který je odvozen ze vztahu pro tíhový potenciál. Celkový výpočet pak řeší určení odlehlosti. Komplikovanost tohoto výpočtu vychází ze skutečnosti, že dané vstupní souřadnice jsou geodetické, ale jako vstup do všech dílčích výpočtů jsou potřebné souřadnice geocentrické. Výpočet geocentrických souřadnic však závisí na hodnotě průvodiče, kterou bez známých geocentrických souřadnic nelze přesně určit. Finální výpočet z tohoto důvodu obsahuje vnitřní a vnější iteraci. Vnitřní iterace řeší hodnotu odlehlosti a zpětné určení geodetických souřadnic pomocí aktuální hodnoty souřadnic geocentrických a průvodiče. Vnější iterace pak řeší opravu geocentrických souřadnic na základě výsledku vnitřní iterace a výpočet nové hodnoty průvodiče. Nutnost tohoto řešení zcela zjevně navyšuje časovou náročnost výpočtu.

Vzhledem k množství dat (body v síti po 1' zeměpisné šířky a po 1,5' zeměpisné délky) je výpočet bod po bodu nevhodný a je třeba provést úpravu takovou, aby byl výpočet řešen naráz pro celou síť bodů. Aby to bylo možné, je potřeba upravit dílčí výpočty. Postup úpravy výpočtu průvodiče je řešen například v [2]. V podstatě jde o nahrazení sumace maticovým násobením, což významně urychlí výpočet a umožní vypočítat hodnoty naráz, pokud se jedná o body v pravidelné síti. Za zmínku v tomto kontextu stojí nutnost zavedení metody řádkových průměrů podle [1], aby byly vyřešeny neodpovídající rozměry matic v jejich součinu podle [2] (problém s rozměry matic totiž při výpočtu pro více zeměpisných délek nezbytně nastane). Tato metoda spočívá v průměrování řádků matice, v níž řádky odpovídají zeměpisným šířkám a sloupce zeměpisným délkám (tedy hodnoty v rámci jednoho řádku odpovídají neměnné zeměpisné šířce a postupně po sloupcích všem zeměpisným délkám). Uvedeným řádkovým průměrem je pro jednu zeměpisnou šířku získána odpovídající průměrná hodnota podle více zeměpisných délek. Aby byl výpočet realizován s dostatečnou přesností, je nutné hodnoty zeměpisné délky rozdělit na několik pásů (intervalů) a výpočet, tedy i řádkové průměry, realizovat pouze v rámci pásu. Na základě testování výběrové množiny bodů bylo pro tuto práci stanoveno jako dostatečně přesné použití 10 pásů zeměpisné délky pro ČR. Výsledky zmíněného testování jsou uvedeny v Tab. 1, kde v levém sloupci je uveden počet pásů pro území ČR, v prostředním sloupci je uvedena doba trvání výpočtu pro daný počet pásů získaná jako aritmetický průměr měřených časů z 10 postupně spuštěných výpočtů a v pravém sloupci pak maximální rozdíl mezi výsledky získanými výpočtem bod po bodu a výsledky získanými metodou řádkových průměrů.

Tab. 1: Posouzení přesnosti a rychlosti pro různý počet pásů zeměpisné šířky

počet pásů zeměpisné délky	průměrný čas z 10 nezávislých výpočtů [s]	maximální rozdíl [mm]
1	7.62	4.96
2	16.24	2.98
3	23.38	2.13
4	32.15	1.67
6	48.46	1.30
8	61.05	0.92
10	77.49	0.81



Dále byl upraven i výpočet normovaných přidružených Legendreových funkcí, pro něž byly použity vztahy uvedené například v [6]. Protože již nebyla potřeba celá matice těchto funkcí, byl výpočet upraven tak, aby byla vždy určena potřebná konkrétní část této matice.

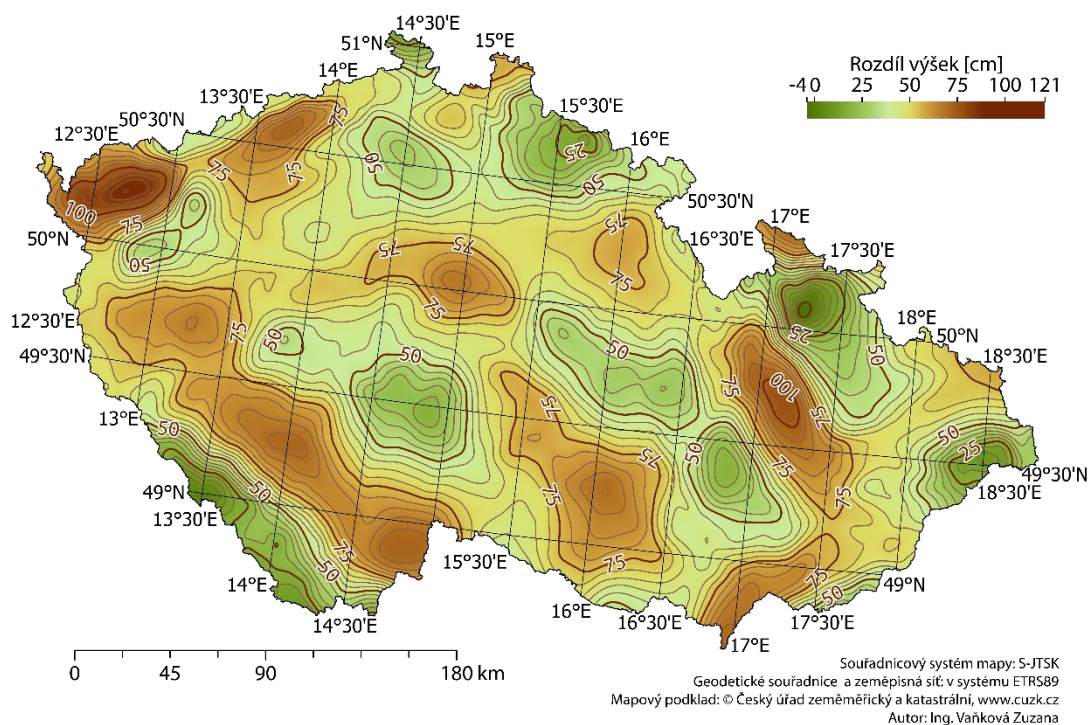
Závěrem pak byl vypočten hromadně pro všechna data rozdíl odlehlosti geoidu a výškové anomálie (tedy rozdíl výšky v systému Bpv a rozdíl výšky vztažené ke geopotenciálnímu modelu EGM96).

### 3 VÝSLEDKY

Výsledkem práce jsou textové soubory s určenými hodnotami rozdílu výšek v gridu na území celé ČR s body po 1' zeměpisné šířky a po 1,5' zeměpisné délky. Výsledné rozdíly výšek získané na základě dat modelu QGZÚ-2013 se pohybovaly mezi -4 cm a 121 cm. Výsledky získané na základě dat modelu CR-2005 byly v intervalu od 0 cm do 122 cm. Tyto výstupy byly dále zpracovány v softwaru ArcGIS Pro. Pomocí interpolace metodou inverzních vzdáleností byly vyhotoveny rastry výškových rozdílů jako podklad pro posouzení výsledků.

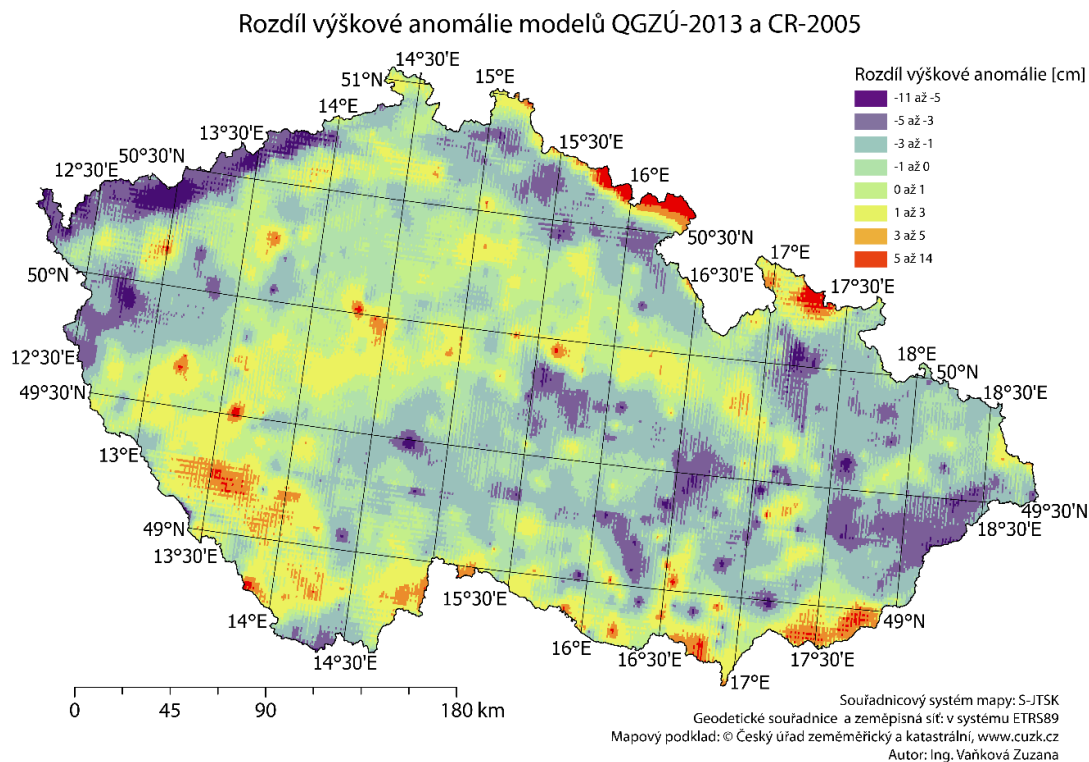
Pro prezentaci výsledků byl vyhotoven grafický výstup zobrazující výškové rozdíly pomocí barevné hypsometrie a vrstevnic (viz Obr.3). Jde o výsledky vyhotovené na základě dat modelu QGZÚ-2013, výsledek na základě dat modelu CR-2005 byl v tomto měřítku obdobný.

Rozdíl výšek v systémech Bpv a EGM96  
na základě modelu kvazigeoidu QGZÚ-2013 pro území ČR



Obr. 3 Vizualizace rozdílů výšek

Srovnání výsledků podle obou modelů je vizualizováno v Obr. 4 jako difference vytvořených rastrů výškových rozdílů, tedy v podstatě jde o rozdíl hodnot výškové anomálie. Výsledky se liší v extrémních případech o 14 cm.



Obr. 4 Srovnání modelů CR-2005 a QGZÚ-2013

## 4 DISKUZE

Pro posouzení výsledků byla využita data GNSS-nivelace na bodech výběrové údržby ZÚ, na nichž byla známa měřená výška v systému Bpv a také výška elipsoidická. Jednoduchým rozdílem byla určena hodnota výškové anomálie na těchto bodech a poté na nich byla vypočtena hodnota výškového rozdílu. Takto získané výškové rozdíly byly považovány za výsledky s vyšší přesností než výsledky řešené na základě dat modelů kvazigeoidu, protože byly založeny na přímo měřených hodnotách. Jejich využití pro komplexní výstup ale nebylo možné, z důvodu malého množství bodů a jejich nepravidelného rozmístění pro oblast ČR.

Výsledné hodnoty byly porovnány pomocí vypočtení diference výškových rozdílu. A to mezi výsledky získanými pomocí dat GNSS-nivelace a výsledky vypočtenými na základě dat modelů kvazigeoidu, pro něž byly příslušné výškové rozdíly odečteny z vyhotovených rastrů v požadovaných bodech. Byly určeny statistické hodnoty popisující rozložení diferencí výškových rozdílu. Pro porovnání na základě modelu CR-2005 byla směrodatná odchylka 2,12 cm, aritmetický průměr 0,81 cm a střední hodnota 0,80 cm. Diference výškových rozdílu na základě modelu QGZÚ-2013 měly směrodatnou odchylku 2,37 cm, aritmetický průměr 0,30 cm a střední hodnotu 0,40 cm. Směrodatná odchylka tedy vycházela spíše ve prospěch výsledků na základě modelu CR-2005, ovšem střední hodnota i hodnota aritmetického průměru hovořila jednoznačně ve prospěch modelu QGZÚ-2013.

Nejvyšší diference ve výsledcích byly pozorovány v pohraničních oblastech a to pro oba modely kvazigeoidu, což je jistě ovlivněno nižší přesností modelů na okrajích ČR a v horských oblastech. („Úplná střední chyba výškové anomálie zeta činí na území ČR 1 cm, v horském terénu a v příhraničních oblastech (do 10 km od státních hranic) může dosahovat hodnot vyšších, nejvýše však 3 cm.“ [8])

Dále je nutné v uvedeném posouzení přihlídnout k té skutečnosti, že vznik modelu CR-2005 je vázán na body GNSS-nivelace: „...model kvazigeoidu CR-2005, který byl odvozen navázáním modelu CR-2000 na síť 1024 bodů výběrové údržby, jejichž výška byla určena nivelací.“ [7] Oproti tomu model QGZÚ-2013 je vázán na jiná data, která s daty GNSS-nivelace nesouvisejí: „Model kvazigeoidu byl získán kombinovaným regionálním řešením lineární gravimetrické okrajové úlohy pro poruchový gravitační potenciál zemského tělesa, a to za významného přispění revidovaného kompletního souboru podrobných bodů gravimetrických mapování ČR zaměřených při geofyzikálním průzkumu



*mezi lety 1950 až 2010 a dalších dat.*“ [8] Tedy lze předpokládat, že srovnání výsledků získaných na základě dat GNSS-nivelace s výsledky na základě modelu CR-2005 tím bude do značné míry ovlivněno.

Model QGZÚ-2013 je dle [8] pravidelně aktualizován a obsahuje podrobnější data než model CR-2005. Podrobnost dat není vždy výhodou, například pro účely globálního výpočtu jsou data až příliš podrobná. Proto ani v rámci této práce nebyla využita všechna data (byla redukována na stejnou podrobnost, jakou má model CR-2005). Tento model by se rozhodně více hodil pro výpočet rozdílů výšek pro menší oblasti, nikoli pro celou ČR, kde nemůže být využit celkový potenciál modelu vycházející z podrobnosti dat.

S přihlédnutím k výše uvedeným skutečnostem, byl nakonec vybrán model QGZÚ-2013 jako podklad pro výškové rozdíly, které budou dále prezentovány. Nelze ovšem říci, že by byl některý z modelů výrazně horší nebo lepší.

## 5 ZÁVĚR

Stanovený cíl práce, tedy určit rozdíly výšek v systému Bpv a výšek vztažených k modelu EGM96 pro území ČR na základě různých vstupních dat, byl splněn. Výškové rozdíly byly také porovnány mezi sebou a byl vybrán model QGZÚ-2013 jako podklad pro výsledky, které budou případně dále řešeny a prezentovány. Výstupy práce byly zpracovány formou textového souboru obsahujícího body v pravidelné síti s odpovídajícími hodnotami rozdílů výšek, odlehlosti geoidu od elipsoidu a výškové anomálie. Z tohoto souboru je možné pomocí interpolace vypočítat hodnoty pro body mimo síť. Pro získání mnohem přesnějších hodnot výškových rozdílů konkrétních bodů by bylo možno na výsledky práce navázat vytvořením výpočetní aplikace s využitím obdobných metod a modelů.

V průběhu cesty vedoucí k naplnění stanovených cílů se vyskytlo mnoho komplikací, které bylo nutno korektně vyřešit. Za zmínku stojí například výpočet průvodiče geoidu, kde se vyskytlo potíží nejvíce, a to zejména z důvodu výpočetní rychlosti a kapacity operační paměti výpočetního zařízení. Proto musela být využita metoda řádkových průměrů (podle [1]), díky které sice počítáme hodnoty přibližné, ale s dostatečnou přesností pro cílový výsledek (pro rozdělení na 10 pásů zeměpisné délky nepřesahuje maximální odchylka 1 mm). Tento krok vedl k výraznému zvýšení výpočetní rychlosti, protože velikost průvodiče může být určena naráz pro velké množství bodů pomocí maticového násobení.

Další výraznou komplikací bylo příliš velké množství dat souborů pro model kvazigeoidu QGZÚ-2013. Data bohužel nemohla být využita všechna ze zřejmých výpočetních důvodů. Také pro realizaci výstupu by data byla příliš podrobná, proto byl problém vyřešen redukcí vstupních dat na méně podrobnou síť (ze sítě se zeměpisnou šířkou i délkou po 3" byla data redukována na síť po 1' zeměpisné šířky a po 1,5' zeměpisné délky).

## SEZNAM LITERATURY

- [1] HOLEŠOVSKÝ, J. Vztah výšek v systémech Bpv a EGM96 na území ČR. 2007. Diplomová práce. ČVUT, Fakulta stavební.
- [2] Sphärisch harmonische Synthese – Programmierung in Matlab. Podklad ke kurzu Höhe, Schwere, Geoid na TU München, no. 10-12, červen 2006. Bez uvedení autora. 6 stran.
- [3] ANTONÍN, Zeman. Fyzikální geodézie 10: teorie výšek a výškové systémy : doplňkové skriptum. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2003. ISBN 80-01-02733-3.
- [4] ANTONÍN, Zeman. Fyzikální geodézie 10. Praha: České vysoké učení technické, 1998. ISBN 80-01-01849-0.
- [5] MERVART, Leoš a Miloš CIMBÁLNÍK. Vyšší geodézie 2. Praha: ČVUT, 1997. ISBN 80-01-01628-5.

- [6] HOLEŠOVSKÝ, J. Výpočet přidružených Legendreových funkcí [online]. [cit. 2021-5-6]. Dostupné z: [ftp://athena.fsv.cvut.cz/VG/VYG2/web\\_data/SHS/Legendreovy\\_funkce.pdf](ftp://athena.fsv.cvut.cz/VG/VYG2/web_data/SHS/Legendreovy_funkce.pdf)
- [7] KOSTELECKÝ, Jan, Jakub KOSTELECKÝ a Ivan PEŠEK. Metodika převodu mezi ETRF2000 a S-JTSK varianta 2. ČÚZK [online]. Praha: ČÚZK, c 2021 [cit. 2021-5-5]. Dostupné z: [https://www.cuzk.cz/Zememericivi/Geodeticke-zaklady-na-uzemi-CR/GNSS/Nova-realizace-systemu-ETRS89-v-CR/Metodika-prevodu-ETRF2000-vs-S-JTSK-var2\(101208\).aspx](https://www.cuzk.cz/Zememericivi/Geodeticke-zaklady-na-uzemi-CR/GNSS/Nova-realizace-systemu-ETRS89-v-CR/Metodika-prevodu-ETRF2000-vs-S-JTSK-var2(101208).aspx)
- [8] Podrobný kvazigeoid QGZÚ-2013. ČÚZK [online]. Praha: ČÚZK, c 2021 [cit. 2021-5-5]. Dostupné z: [https://geoportal.cuzk.cz/\(S\(svjpsfcw4dgtxwq5xardt0t\)\)/Default.aspx?mode=TextMeta&side=bodpole&metadataID=CZ-CUZZK-QGZU&head\\_tab=sekce-02-gp&menu=275](https://geoportal.cuzk.cz/(S(svjpsfcw4dgtxwq5xardt0t))/Default.aspx?mode=TextMeta&side=bodpole&metadataID=CZ-CUZZK-QGZU&head_tab=sekce-02-gp&menu=275)